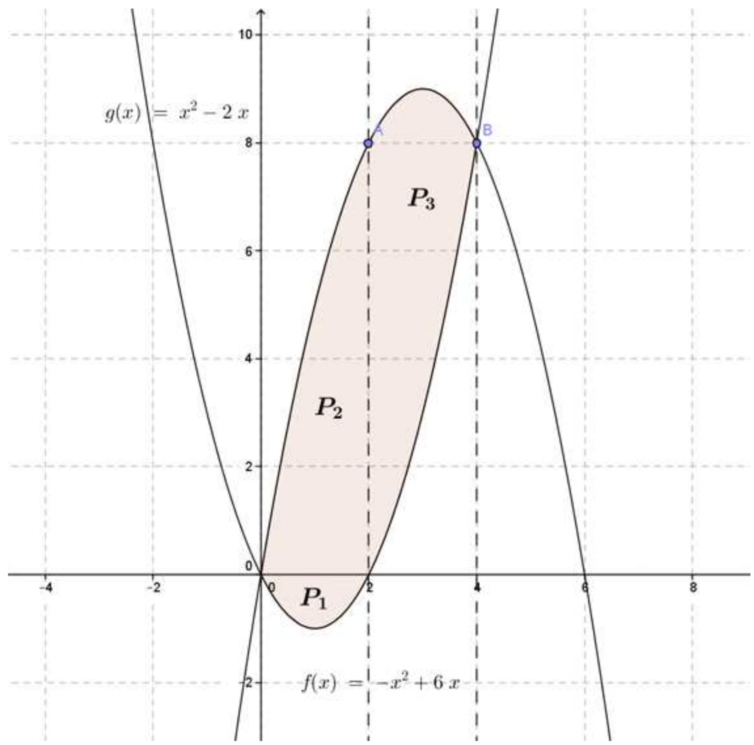
1. Izračunati površinu ograničenu funkcijama $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

Crtamo obe funkcije tako što određujemo nule funkcije, presečne tačke sa x i y osama i ekstremne vrednosti funkcija.

$y = 6x - x^2$	$y = x^2 - 2x$
$x(6 - x) = 0$	$x(x - 2) = 0$
$x_1 = 0 , x_2 = 6$	$x_1 = 0 , x_2 = 2$

Ekstremne vrednosti za funkcije su:

$y = 6x - x^2$	$y = x^2 - 2x$
$y' = 6 - 2x$	$y' = 2x - 2$
$6 - 2x = 0$	$2x - 2 = 0$
$x = 3 , y = 9$	$x = 1 , y = -1$



Nakon crtanja funkcija, određujemo presečne tačke funkcija i ukupnu površinu nalazimo kao zbir pojedinih površina u datim intervalima.

Presečne tačke funkcija zadovoljavaju uslov sistema od dve jednačine sa dve nepoznate.

$$y = 6x - x^2$$
$$y = x^2 - 2x$$

$$6x - x^2 = x^2 - 2x$$
$$2x^2 - 8x = 0$$
$$x(x - 4) = 0$$
$$x_1 = 0 , x_2 = 4$$

Ove tačke su nam bitne za određivanje granica integrala:

$$P_1 = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| , \; P_2 = \int_0^2 (-x^2 + 6x) dx , \; \text{i} \; P_3 = \int_2^4 (-x^2 + 6x - (x^2 - 2x)) dx \; \text{,odnosno}$$

$$P_3 = \int_2^4 (-2x^2 + 8x) dx .$$

Rešavanjem ovih integrala dobijamo ukupnu traženu površinu.

$$P_1 = \left|\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2\right| = \left|\frac{2^3}{3} - 2^2\right| = \left|\frac{8}{3} - 4\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

$$P_2 = \int_0^2 \left(6x - x^2\right)dx = \left(\frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{6\cdot 2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) = 12 - \frac{8}{3} = \frac{28}{3}$$

$$P_3 = \int_2^4 \left(8x - 2x^2\right)dx = \left(\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 = \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 = \left(4\cdot 4^2 - \frac{2\cdot 4^3}{3}\right) - \left(4\cdot 2^2 - \frac{2\cdot 2^3}{3}\right) =$$

$$P_3 = \left(\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 = \left(64 - \frac{128}{3}\right) - \left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3} - \frac{32}{3} = \frac{32}{3}$$

Pošto je ukupna osenčena površina jednaka zbiru ovih površina, tada je:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = \frac{4}{3} + \frac{28}{3} + \frac{32}{3}$$

$$P = \frac{64}{3}$$