

3. Odrediti a i b tako da polinom $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ bude potpun kvadrat.

Pošto je dati polinom četvrtog stepena, polinom čiji je on kvadrat, mora da bude drugog stepena.

Uzećemo da je to polinom $x^2 + Ax + B$.

Sada možemo da zapišemo:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b = (x^2 + Ax + B)^2$$

Kako je : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, tada je:

$$\begin{aligned}x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b &= (x^2 + Ax + B)^2 \\x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b &= x^4 + A^2x^2 + B^2 + 2(Ax^3 + Bx^2 + ABx) \\x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b &= x^4 + A^2x^2 + B^2 + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2ABx\end{aligned}$$

Sređivanjem izraza imamo:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b = x^4 + 2Ax^3 + (A^2 + 2B)x^2 + 2ABx + B^2$$

$$\begin{aligned}2A &= 1 & A^2 + 2B &= 2 \\A &= \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + 2B &= 2 \\ & & B &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

Sada možemo da izračunamo a i b :

$$\begin{aligned}a &= 2AB & b &= B^2 \\a &= \frac{7}{8} & b &= \frac{49}{64}\end{aligned}$$

Konačno, možemo da zapišemo:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + \frac{7}{8}x + \frac{49}{64} = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}\right)^2$$