107. b) Odrediti funkcije *f*(*x*) i *g*(*x*), koje zadovoljavaju sisteme:

$$f(2x+1)+2g(2x+1)=2x \quad \text{i} \quad f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x$$

$$f(2x+1)+2g(2x+1)=2x \qquad (1)$$
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x \qquad (2)$$

Posmatramo prvo jednačinu (1)

$$f(2x+1)+2g(2x+1)=2x \quad \text{uvodimo smenu}$$

$$2x+1=t$$
$$2x=t-1$$
$$x=\frac{t-1}{2}$$

$$f(t)+2g(t)=\frac{t-1}{2}$$
$$f(t)+2g(t)=2\cdot\frac{t-1}{2}$$

$$f(t)+2g(t)=t-1 \qquad (3)$$

Sada posmatramo jednačinu (2)

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x \ , \quad \text{uvodimo smenu}$$

$$\frac{x}{x-1}=t$$
$$x=t\cdot(x-1)$$
$$x=t\cdot x-t$$
$$t\cdot x-x=t$$
$$x\cdot(t-1)=t$$
$$x=\frac{t}{t-1}$$

Kako je , $f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x$, uvodimo smenu $\frac{x}{x-1}=t$

$$f(t)+g(t)=\frac{t}{t-1} \qquad (4)$$

Sada su jednačine (3) i (4):

$$f(t)+2g(t)=t-1$$
$$f(t)+g(t)=\frac{t}{t-1}$$

Oduzimanjem druge jednačine od prve, imamo:

$$g(t)=t-1-\frac{t}{t-1}$$
$$g(t)=\frac{(t-1)^2-t}{t-1}$$
$$g(t)=\frac{t^2-2t+1-t}{t-1}$$
$$g(t)=\frac{t^2-3t+1}{t-1}, \text{ odnosno } \quad g(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$

$$f(t)+g(t)=\frac{t}{t-1}$$
$$f(t)=\frac{t}{t-1}-\frac{t^2+3t-1}{t-1}$$
$$f(t)=\frac{t-t^2+3t-1}{t-1}$$
$$f(t)=\frac{-t^2+4t-1}{t-1}$$
$$f(t)=\frac{t^2-4t+1}{1-t} \text{ , odnosno } \quad f(x)=\frac{x^2-4x+1}{1-x}$$

Rešenja su :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+1}{1-x} \quad \text{i} \quad g(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$