

17. Dokaži da je broj $6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$, deljiv sa 900 za svaki prirodan broj n .
(opštinsko 2009)

Ako malo sredimo dati izraz, dobijamo:

$$\begin{aligned}6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36 &= \\6^2 \cdot 6^{2n} - 2 \cdot 2^{n+2} \cdot 3^{n+2} + 36 &= \\6^2 \cdot 6^{2n} - 2 \cdot 6^{n+2} + 36 &= \\6^2 \cdot 6^{2n} - 2 \cdot 6^2 \cdot 6^n + 36 &= \\36 \cdot 6^{2n} - 2 \cdot 36 \cdot 6^n + 36 &= \\36 \cdot (6^{2n} - 2 \cdot 6^n + 1) &= \\36 \cdot (6^n - 1)^2 &= \end{aligned}$$

Izraz $(6^n - 1)$ je deljiv sa 5 jer ako 6 stepenujemo bilo kojim brojem, broj koji dobijamo završava se cifrom 6. Ako od tog broja oduzmemo 1, dati broj se završava cifrom 5, pa je samim tim i taj broj $(6^n - 1)$, deljiv brojem 5. Tada je i $(6^n - 1)^2$, deljiv brojem 25. Kako je dati izraz jednak izrazu, $36 \cdot (6^n - 1)^2$, tada je i taj izraz deljiv sa 900, jer je $36 \cdot 25 = 900$.