483. Ako je: $a+b+c=0$, dokazati da je: $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$

$$a+b+c=0$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$$

Kvadrat trinoma se izračunava na ovaj način:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \qquad (1)$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \qquad (2)$$

Ako posmatramo jednačinu (1) :

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Iz uslova zadatka imamo:

$$0=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$
$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$$

Kvadriranjem leve i desne strane dobijamo:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ =4(ab+ac+bc)^2$$

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=4\big(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)\big)$$

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+8abc(a+b+c)$$

$$a^4+b^4+c^4=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

Kako je iz jednačine (2) :

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+a^4+b^4+c^4$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2a^4+2b^4+2c^4$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$$